



ISMÉTLŐDÉSEK

DR. MUNKÁCSY KATALIN

ELTE TTK

E-mail: katalin.munkacsy@gmail.com

DOI 10.23716/TT0.23.2020.18

Absztrakt:

A matematika sok területének szoros kapcsolata van a ritmussal. Most az ismétlődésekre helyezem a hangsúlyt, olyan témákat szeretnék bemutatni, amelyek a matematikatörténet tanítása során merültek föl.

Sorminták, síkkitöltések

Háromszög- és egyéb számok az antik görög matematikában

A csillagászat, mint a periodikusan ismétlődő jelenségek tudománya

Helyiértékes és nem helyiértékes számírások. Mitől függ, hogy milyen nagy számot tudunk leírni?

Össze nem mérhető szakaszok, a pi közelítése, végtelen tizedes törtek — a szigorú szabályok szerinti és a látszólag szabályok nélküli ismétlődések

Klasszikus titkosírások, az ismétlődések statisztikai vizsgálatán alapuló megfejtések. Egyetlen jellel kódolás.

Mandelbrot halmazok

Kulcsszavak: matematikai ismeretterjesztés, periodicitás, matematikatörténeti jelenségek

Már évtizedek óta tanítok matematika tanárszakos hallgatóknak matematikatörténetet. A legkülönbözőbb matematikai részterületeken bukkant fel az ismétlődés. Ezekből szeretnék néhány érdekes példát bemutatni. Forrásaim egyetemi tankönyvek és jegyzetek saját tanulmányaim idejéből valamint hallgatóim tankönyvei, összefoglaló matematikatörténeti művek és tudományos ismeretterjesztő oldalak az internetről.

Sorminták, síkkitöltések

Az ismétlődések egyik különleges változata a sorminták és síkkitöltések. Parkettázás, csempézés vagy tapétázás a neve, gyakran előfordul a népszerűsítő irodalomban.

A legkorábbi emlékek néprajziak, népművészetiek. Például a magyar népművészetben a lepedőszélek mintái között mind a hét végtelen sormintát adó transzformációra épülő mintát megtalálhatjuk. A síkkitöltések gyönyörű és matematikailag szinte teljes változata felfedezhető a spanyol Alhambra erőd csempéin.



Ugyanakkor sávok, felületek és a térbeli alakzatok kitöltésének és lefedésének vizsgálata modern kutatási terület, amit nemcsak az euklideszi geometria által meghatározott keretek között, hanem a hiperbolikus síkon és térben is végeznek. Ezeknek a kutatásoknak egyik nemzetközileg elismert tekintélye Molnár Emil.

Háromszög számok, sokszög számok

A négyzetszámokat mindannyian ismerjük. Az antik görög kultúrában voltak háromszög, négyszög, ötszög és további sokszögszámok. Érdekes átmenetet képeznek az ősi matematikai tevékenység, a kavicsok kirakásával végzett megfigyelések és a matematikai összefüggések megállapítása között.

Csillagászat

Sok csillagászati megfigyelés szabadszemmel is elvégezhető. Ilyen a napfogyatkozás és a holdfogyatkozás. Az évszázadokon keresztül gyűjtött adatok következtésekre adnak lehetőséget. Ennek egy érdekes történeti példája Thalesz nevéhez fűződik. Megjósolt egy napfogyatkozást ie. 585-ben, és a monda szerint ez egy csatában a görögök győzelméhez vezetett. Ők számítottak a világ elsötétedésére, míg ellenségeik ezt a görögök oldalán történő isteni beavatkozásnak tartották. De hogyan láthat valaki előre egy napfogyatkozást? Úgy, hogy a korábbi, valószínűleg babilóniai megfigyelési táblázatok alapján észrevette a periodikus ismétlődést, és ezeket az ismereteket alkalmazta a nehéz helyzetben. És hogyan tudunk mi minderről? Fennmaradt a monda, aminek igazságtartalmát az elmúlt évszázadban régészeti emlékek és a csillagászati számítások bizonyították.

Számírások

A számlálás az ismétlődések felismerésén és formalizálásán alapul. Ha nem lenne a számok elnevezésében és leírásában rendszer, minden számnak külön neve kellene, hogy legyen. És nagyobb számok esetében már a legegyszerűbb összeadást sem lehetne elvégezni. A nem helyiértékes számírások lehetővé tették a számok pontos leírását a jelek adta korlátokon belül és az egyszerűbb műveletek elvégzését. Bonyolultabb számításokhoz, az ókorban a hajózás igényeit kielégítő csillagászati és egyéb számításokhoz szükség volt modernebb rendszerre, és ez a helyiértékes számírás. A babilóniak alkalmazták először, körülbelül 4000 évvel ezelőtt. Ez a felfedezés óriási jelentőségű volt, bár mi már nem is érezzük nagyszerűségét. Az időmérésben az óra felosztása 60 percre, a perc felosztása 60 másodpercre a babilóniak 60-as helyiértékes számírását örzi. Átvette Archimédest, tőle pedig az arab hajósok. Csillagászati és hajózási jelentősége annyira mély nyomot hagyott kultúránkban, hogy sok-sok logikailag jól megalapozott reformkísérlet ellenére sem sikerült az időszámításban és a szögmérésben áttérni a tisztán tizes alapú mértékegységekre.

Össze nem mérhető szakaszok, a π közelítése, végtelen tizedes törtek

A racionális számok felírhatók végtelen szakaszos tizedes törtek formájában. Vannak másfajta számok is? Az első irracionális számok a gyökkettő és a π voltak. Már az ókori görögök is tudták, hogy ezek nem számok, vagyis nem lehetnek egész számok, illetve ezek hányadosai. Ma már úgy mondjuk, hogy vannak számok, amelyek nem írhatók fel két egész szám hányadosaként, másképp szólva tizedes tört alakjuk nem végtelen szakaszos tizedes tört. Az irracionális számok elmélete később született meg, ezen belül a legérdekesebbek és egyben a legnagyobb részhalmazt is alkotják a transzcendens számok. Sokáig kérdéses volt, hogy léteznek-e transzcendens számok, és ha igen, azok milyen alakúak, felírhatók-e tizes számrendszerünkben. A XVIII. században sikerült bebizonyítani, hogy a π irracionális. A XIX század végén pedig azt, hogy az e szám és a π is transzcendens számok, vagyis nem írhatók fel a négy alapművelettel és gyökkitevőkkel. Az is kiderült, hogy a transzcendens számok között vannak könnyen megszerkeszthetők, jól átláthatók is. Ezekben újra ismétlődés lehet, de annak módosított formájában, pl. a 0,010010001.... végtelen tizedes tört transzcendens szám.

Titkosírások

Évezredek óta rengetegféle titkosírást találtak ki kereskedelmi, hadi, pénzügyi és egyéb célokra. A legegyszerűbbek, amikor minden betűnek egy másik betűt feleltetnek meg. Ránézésre összefüggéstelen szöveget kapunk, de rövid próbálkozás után könnyen megfejthető. Különösen akkor, ha az abc-ben minden betű helyett az azt egygyel, kettővel vagy következetesen n -nel követő betűt írjuk. Szabályok nélküli, véletlenszerű hozzárendelés esetén az ismétlődések, vagyis statisztikai megfontolások segítenek a megfejtésben.

Modern matematikai eszközökkel gyakorlatilag megfejthetetlen titkosítások készíthetők. Akár egyetlen jellel, vagyis egyetlen számmal is lehet szövegeket kódolni. A kódolás a prímszámok régóta ismert tulajdonságain és a matematika legújabb eredményein alapul, a de technikai végrehajtásához szükségesek a modern informatikai eszközök. Kevés jelből összeállított rövid szövegen ezt a fajta kódolást akár fejszámolással is elvégezhetjük, vagyis írhatunk és olvashatunk így kódolt 3 betű hosszúságú, 3féle jelből álló szöveget. (Természetesen ilyen egyszerű szövegeket akár meg is számozhatnánk, és csak a sorszámot küldhetnénk el, de ez a példa az elv bemutatását szolgálhatja.)

Mandelbrot halmazok

Kedves kollégám mesélte, az azóta elhunyt Votisky Zsuzsa, aki a Typotex kiadó kitalálójaként csodálatos gazdagságban adta ki a matematikai könyveket, hogy azt várta az egyetemtől, hogy új és érdekes dolgokat fog megismerni, de újra egyenesekről, háromszögekről meg körökről tanult a geometria előadásokon. Természetesen ezek a fogalmak jelentik a geometria alapját, így részei az egyetemi tananyagnak, azonban vannak egészen új elméletek a geometria és más matematikai ágak határterületein. Pl. a fraktálmélet. Erről a mai egyetemisták már hallanak, de többségük keveset tanul róla. A fraktálokat legegyszerűbb úgy elképzelnünk, ahogy azok felfedezése is történt. Próbáljuk meghatározni Anglia kerületét. Minél pontosabb, finomabb, részletesebb térképet nézünk, annál több kanyart, öblöt és félszigetet láthatunk. Bármelyik sima szakaszt nézzük meg egyre közelebből, egyre több kanyarodó vonalat látunk. De ilyen a csillagos ég is. Ha felnézünk éjjel az égre, különböző alakzatokban csillagokat láthatunk. És ha látszólag üres területre irányítjuk a távcsövünket, újra látunk különböző csillagokat. És ezt folytathatjuk tovább. Minden kis részlet hasonló az egész ábrához, és a részletek részletei is. A valóságban nem tudhatjuk, hogy végtelenségig folytatható-e ez a nagyítás, a matematikai modellben viszont igen. És a fraktálok nemcsak különlegesek és szépek, hanem a ma már sokfelé alkalmazhatóak. Például akár egy fényképet egyetlen képlettel megadhatunk, és csak a sokadik nagyításnál vehető észre, hogy a képlet által szerkesztett kép és a fénykép két különböző ábra.

Nagyon nagy gráfok

Pontokat kötünk össze élekkel. Lehet, hogy csak néhány pontot. Mindannyian ismerjük a táncoló párokra vonatkozó és hasonló feladatokat. És lehet sokmillió pontot is összekötni. Az ilyen hatalmas gráfok sok hasonló kis részletből állnak össze, amelyek oly sokszor ismétlődnek, hogy csak igen absztrakt módszerekkel vizsgálhatók. Az ismétlődések a matematikai absztrakció alapjait jelentik. A problémamegoldó gondolkodás fejlesztése során gyakran emlegetett mondás, hogy az egyszer alkalmazott szokatlan megoldás: trükk, a kétszer alkalmazott: módszer, a többször alkalmazott problémamegoldó gondolat már egy összefüggő elméleti rendszer része. Hasonlót mondhatunk arról a matematikai eszközökkel vizsgált helyzetről, ha egy jelenséget, mintát egyszer, kétszer és ha többször is megfigyelhetünk.

Repetitions in Mathematics

Many areas of mathematics have a strong relationship with rhythm. Now I focus on repetition, wanting to introduce topics that arose in teaching math history.

- Tiling a row, tiling the plane
- The triangular number and other figurate numbers
- Astronomy as a science of periodic phenomena
- The place value system and numbers writing without place value
- Incomparable sections, the approximation of π , infinite decimal fractions — strict rules and seemingly unregulated repetitions
- Classic cryptography, statistical analysis of repetitions, coding by one character
- Mandelbrot sets

Keywords: popularization of mathematics, repeating patterns, some data of mathematics history